Drei Vektorprodukte und und einige Bemerkungen zur Gleichung $x^2 + 1 = 0$

Josef Lechner

In memoriam HANS-CHRISTIAN REICHEL

Zusammenfassung

Es gibt einige (mehr oder weniger isolierte) Themen der Schulmathematik, die ungeliebt sind und stark vernachlässigt werden. Dazu gehören etwa die verschiedenen Vektorprodukte, die Additionstheoreme für Winkelfunktionen, die komplexen Zahlen oder algebraische Strukturen von Zahlenmengen bzw. Rechenobjekten. In Schule kommt zumeist das Skalarprodukt, manchmal das (in der Physik so bedeutsame) Vektorprodukt vor, beiden haftet etwas Fragmentarisches an. Während das Ergebnis des Skalarprodukts von Dimension 1 und das des Vektorprodukts von Dimension 3 ist, fehlt ein Vektorprodukt von Dimension 2. Dieses kommt zwar als Produkt zweier komplexer Zahlen vor, wird aber selten bewusst als Vektorprodukt gesehen. Das ist schade. Man verzichtet dadurch auf viele Möglichkeiten der Veranschaulichung und auf viele Chancen tragfähige Grundvorstellungen – über die bekannten hinaus – für komplexe Zahlen aufzubauen. An oben angeführter Gleichung soll exemplarisch gezeigt werden, welche überraschenden und erstaunlichen Zusammenhänge sich ergeben, wenn (mangels Erfolg im $\mathbb{R}^1$) die Suche nach Lösungen auf $\mathbb{R}^2$ ausgedehnt und das auftretende Produkt als Vektorprodukt mit Dimension 2 gedeutet wird.

1 Vektorprodukte

Die analytische Geometrie und insbesondere die Physik kommen nicht ohne Vektorprodukte aus. Dennoch werden sie (zumindest im Schulunterricht) meist eher stiefmütterlich behandelt. Dies v.a. deswegen, weil sie isoliert im Unterricht auftauchen und so ihr innerer Zusammenhang nicht hergestellt. Weiters unterbleiben wichtige Visualisierungen, die das Verständnis dieser Materie erleichtern.

1.1 Das skalare Produkt und das vektorielle Produkt

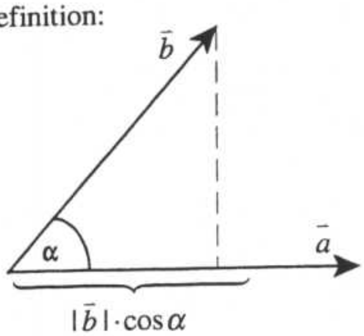
Stellen wir zunächst die beiden Vektorprodukte einander gegenüber. Für beide gibt es eine algebraische und eine anschauliche geometrische (die aber in den Schulbüchern meist unterbleibt!) Definition.

Skalares Produkt

Algebraisch Definition:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Geometrische Definition:



$$\bar{a} \cdot \bar{b} := |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\sphericalangle \bar{a}, \bar{b})$$

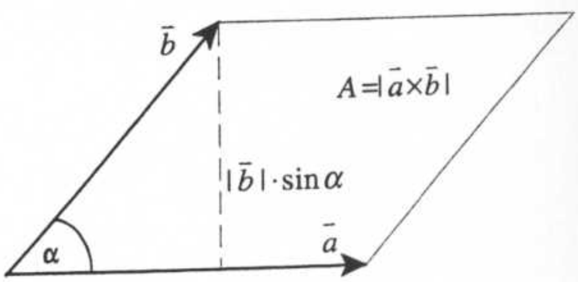
$$\Rightarrow \cos(\sphericalangle \bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

Vektorielles Produkt

Algebraisch Definition:

$$\bar{a} \times \bar{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Geometrische Definition:



$$\bar{a} \times \bar{b} := |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\sphericalangle \bar{a}, \bar{b})$$

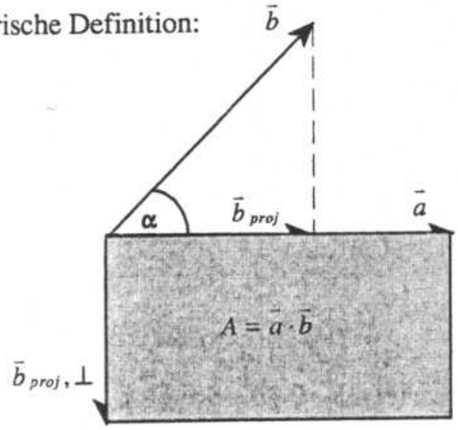
$$\Rightarrow \sin(\sphericalangle \bar{a}, \bar{b}) = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

Algebraische Eigenschaften:		Algebraische Eigenschaften:	
	Kommutativgesetz gilt		„Antikommuativgesetz“ gilt
(1)	$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$	(1)	$\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$
	Multiplikation mit Nullvektor		Multiplikation mit Nullvektor
(2)	$\bar{a}\cdot\bar{o}=0$	(2)	$\bar{a}\times\bar{o}=\bar{o}$
	Multiplikation gleicher Vektoren		Multiplikation gleicher Vektoren
(3)	$\bar{a}\cdot\bar{a}=a_x^{\;2}+a_y^{\;2}+a_z^{\;2}=\left\|\bar{a}\right\|^2=\bar{a}^2$	(3)	$\bar{a}\times\bar{a}=\bar{o}$
(4a)	Assoziativgesetz gilt nicht!	(4a)	Assoziativgesetz gilt nicht!
	$\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})\neq(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c}$		$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})\neq(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$
(4b)	Assoziativ mit Skalar	(4b)	Assoziativ mit Skalar
	$k\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})=(k\cdot\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(k\cdot\bar{b})$	(4)	$k\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=(k\cdot\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(k\cdot\bar{b})$
(4b)	Distributivgesetz gilt		Distributivgesetz gilt
(5)	$\bar{a}\cdot(\bar{b}\pm\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}\pm\bar{a}\cdot\bar{c}$	(5)	$\bar{a}\times(\bar{b}\pm\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}\pm\bar{a}\times\bar{c}$
	Orthogonalität (nicht Nullteiler-frei)		Parallelität (nicht Nullteiler-frei)
(6)	$\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Leftrightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$	(6)	$\bar{a}\times\bar{b}=0\Leftrightarrow\bar{a}\parallel\bar{b}$
(7)	Dimension beliebig	(7)	3-Dimensional
	Das Produkt $\bar{a}\cdot\bar{b}$ ist für beliebig dimensionale Räume definiert.		Das Produkt $\bar{a}\times\bar{b}$ ist nur für dreidimensionale Räume definiert.

In der Gegenüberstellung der Definitionen und der algebraischen Eigenschaften lassen sich einige weitere interessante Beobachtungen machen:

- Während die Dimension von $\bar{a}\cdot\bar{b}$ ist 1, liefert ist das Produkt $\bar{a}\times\bar{b}$ ein Ergebnis von Dimension 3.
- Die Ergebnisse beider Vektorprodukte lassen sich aber auch als orientierte Flächeninhalte interpretieren

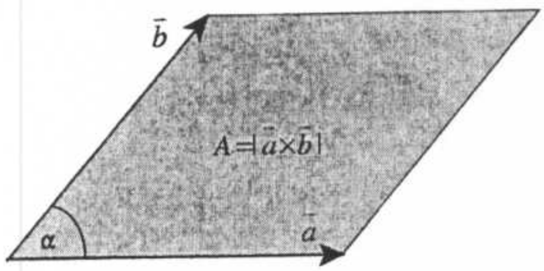
Geometrische Definition:



Wenn $\bar{a},\bar{b}_{proj}$ gleich orientiert $\Rightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}>0$

Wenn $\bar{a},\bar{b}_{proj}$ entgegensetzt orientiert $\Rightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}<0$

Geometrische Definition:



Wenn $\bar{a}$ rechts von $\bar{b}\Rightarrow\|\bar{a}\times\bar{b}\|>0$

Wenn $\bar{a}$ links von $\bar{b}\Rightarrow\|\bar{a}\times\bar{b}\|<0$

- Beide Vektorprodukte liefern je eine Beziehung zur Bestimmung des eingeschlossenen Winkels

$$\alpha=\arccos\left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}\right)\text{ bzw. }\alpha=\arcsin\left(\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}\right)$$

- Beide Vektorprodukte hängen über die Lagrange-Identität $(\bar{a}\times\bar{b})^2 + (\bar{a}\cdot\bar{b})^2 = \bar{a}^2\cdot\bar{b}^2$ zusammen.

  Bew.: Da $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \underbrace{|\bar{a}|^2\cdot|\bar{b}|^2\cos^2\alpha}_{(\bar{a}\times\bar{b})^2} + \underbrace{|\bar{a}|^2\cdot|\bar{b}|^2\sin^2\alpha}_{\bar{a}^2\cdot\bar{b}^2} = \underbrace{|\bar{a}|^2\cdot|\bar{b}|^2}_{\bar{a}^2\cdot\bar{b}^2}$

- Mit Hilfe der beiden Vektorprodukte lässt sich aber auch ein weiteres Vektorprodukt - das zur Volumsberechnung sehr praktisch ist - definieren

$$<\bar{a},\bar{b},\bar{c}> := \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a}) = \bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$<\bar{a},\bar{b},\bar{c}>$ beschreibt das Volumen des von $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $\bar{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (Spat).

1.2 Das Kreisprodukt

Nach diesen einleitenden Betrachtungen wollen wir uns nun den Vektorprodukten in der Ebene zuwenden. Unser Ziel ist es, ein Vektorprodukt für zwei Vektoren in der Ebene zu definieren, das (vernünftige) algebraische Eigenschaften aufweist. Eine erste sinnvolle Forderung ist etwa die, dass auch das so definierte Produkt wieder ein Vektor in der Ebene ist, in der die beiden Faktoren(vektoren) liegen.
Sowohl Skalar- als auch Vektorprodukt kommen dafür nicht in Frage. Das Skalarprodukt liefert nur eine reelle Zahl.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Mit dem Vektorprodukt sieht es ähnlich düster aus. Wollen wir das Vektorprodukt überhaupt ins Spiel bringen, so müssen wir die beiden Ausgangsvektoren als Vektoren im $\mathbb{R}^3$ interpretieren:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = |a_1b_2 - a_2b_1| \text{ bzw. } \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

Das Ergebnis ist hier ein Vektor der normal zu unseren Faktoren steht bzw. – wenn wir uns auf den Absolutbetrag oder besser noch auf die dritte Koordinate des Vektorprodukts beschränken – wieder eine reelle Zahl. Also scheinbar beide Mal eine Fehlanzeige. Aber könnten wir nicht auf die richtige Fährte kommen, wenn wir beide Produkte zusammenfassen? Wir haben doch zwei reelle Zahlen, die sich als Koordinaten eigenen könnten. Experimentieren wir einfach wenig. Versuchen wir es zuerst mit folgender naheliegender

Definition: $\bar{a}\bullet\bar{b} := \begin{pmatrix} \bar{a}\cdot\bar{b} \\ (\bar{a}\times\bar{b})_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_0 + a_1b_1 \text{ A} \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

Leider hat dieses Produkt eine unangenehme Eigenschaft vom vektoriellen Produkt geerbt: es ist nicht kommutativ. Da solch ein Produkt auf Dauer doch ziemlich mühsam zu handhaben wäre, wollen wir uns nach einer besseren Variante umsehen. Dazu gehen wir zur Polardarstellung über:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\bar{a}|\cdot\cos\varphi_a \\ |\bar{a}|\cdot\sin\varphi_a \end{pmatrix} = |\bar{a}|\begin{pmatrix} \cos\varphi_a \\ \sin\varphi_a \end{pmatrix},\ \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\bar{b}|\cdot\cos\varphi_b \\ |\bar{b}|\cdot\sin\varphi_b \end{pmatrix} = |\bar{b}|\begin{pmatrix} \cos\varphi_b \\ \sin\varphi_b \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt liefert dann unter Zuhilfenahme des Additionstheorems für Winkelfunktionen

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot(\cos\varphi_a\cdot\cos\varphi_b + \sin\varphi_a\cdot\sin\varphi_b) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\varphi_a - \varphi_b).$$

Analog ergibt sich für die dritte Koordinate des Vektorprodukts

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot(\cos\varphi_a\cdot\sin\varphi_b - \sin\varphi_a\cdot\cos\varphi_b) = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin(\varphi_a - \varphi_b) \quad .$$

Damit können wir unsere ursprüngliche Definition auch folgendermaßen anschreiben:

Definition: $$\bar{a}\bullet\bar{b} := \begin{pmatrix} \bar{a}\cdot\bar{b} \\ \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 \\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 \end{pmatrix} = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\begin{pmatrix} \cos(\varphi_a - \varphi_b) \\ \sin(\varphi_a - \varphi_b) \end{pmatrix}$$

Was bedeutet $\varphi_a - \varphi_b$ für die beiden Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$? Leider herrscht um den Winkelbegriff ein gewisse Verwirrung. Einerseits gibt es den *trigonometrischen Winkelbegriff*. Hier fasst man den Winkel als Mittelpunktswinkel eines Kreises vom Radius 1 auf und drückt ihn in Grad oder in der entsprechenden Bogenlänge aus, er ist mod 360° bzw. mod 2π bestimmt. Dieser Winkel ist ein orientierter. Bewegt man sich gegen den Uhrzeigersinn, so ist er positiv zu rechnen, bewegt man im Uhrzeigersinn, dann negativ. Andererseits gibt es den *eingeschlossenen Winkel*. Dieser Winkel wird durch zwei Vektoren aufgespannt. Hier liegt der Winkel stets zwischen 0 und π, ist also stets positiv.

Die Winkel φ_a, φ_b sind - da wir von der Polardarstellung der Vektoren ausgegangen sind - klarerweise trigonometrische Winkel. Für ihre Differenzen gelten dann folgende Zusammenhänge:

	Trigonometrischer Winkel	Eingeschlossener Winkel
$\varphi_a \geq \varphi_b$	$\varphi_a - \varphi_b \geq 0$	$\varphi_a - \varphi_b \geq 0$
$\varphi_a < \varphi_b$	$\varphi_a - \varphi_b < 0$	$\varphi_b - \varphi_a > 0$

Wir sehen nun, woran die Kommutativität scheitert: Obwohl die eingeschlossenen Winkel der beiden Faktorvektoren jeweils gleich sind, ergibt sich dennoch jeweils ein anderer (trigonometrischer) Differenzwinkel. Würden wir an Stelle der Differenz der beiden Winkel die Summe der Winkel verwenden, so so wäre uns sofort ein kommutatives Vektorprodukt sicher:

$$\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos(\varphi_a + \varphi_b) = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot(\cos\varphi_a\cdot\cos\varphi_b - \sin\varphi_a\cdot\sin\varphi_a) = a_1\cdot b_1 - a_2\cdot b_2$$

$$\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin(\varphi_a + \varphi_b) = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot(\cos\varphi_a\cdot\sin\varphi_b + \sin\varphi_a\cdot\cos\varphi_b) = a_1\cdot b_2 + a_2\cdot b_1$$

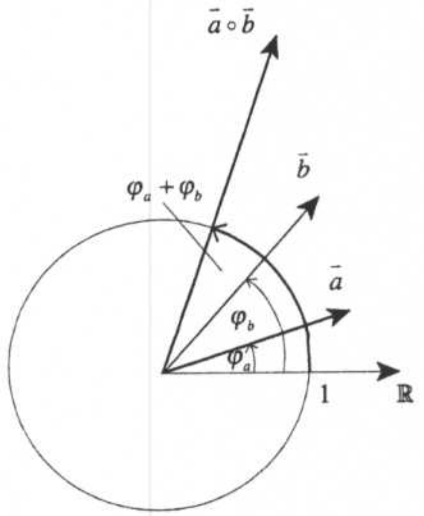
Auf Grund ihrer geometrischen Definition wollen wir diese Verknüpfung *Kreisprodukt* nennen.

Algebraische Definition:

$$\bar{a}\circ\bar{b} := \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Geometrische Definition:

$$\bar{a}\circ\bar{b} := \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\begin{pmatrix} \cos(\varphi_a + \varphi_b) \\ \sin(\varphi_a + \varphi_b) \end{pmatrix}$$



Das Kreisprodukt ist nicht nur kommutativ, sondern besitzt durchwegs sehr angenehme algebraische Eigenschaften. Insgesamt bilden die Vektoren der Ebene zusammen mit der Vektoraddition und dem Kreisprodukt einen nicht-geordneter Körper.

Algebraische Eigenschaften

Für alle Vektoren $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ der Ebene gilt:	Addition	(Kreis-)Multiplikation
Abgeschlossenheit	$\bar{a} + \bar{b}$ eindeutig und wieder Vektor der Ebene	$\bar{a} \circ \bar{b}$ eindeutig und wieder Vektor der Ebene
Kommutativgesetz	$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$	$\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{b} \circ \bar{a}$
Assoziativgesetz	$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$	$(\bar{a} \circ \bar{b}) \circ \bar{c} = \bar{a} \circ (\bar{b} \circ \bar{c})$
Existenz eines neutralen Elements	$\bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$	$\bar{a} \circ \bar{1} = \bar{a}$, mit $\bar{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Existenz eines inversen Elements	$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$	$\bar{a} \circ \bar{a}^{-1} = \bar{1}$, mit $\bar{a}^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \\ -\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} \end{pmatrix}$
Distributivgesetz	$(\bar{a} + \bar{b}) \circ \bar{c} = \bar{a} \circ \bar{c} + \bar{b} \circ \bar{c}$	
Einselement	$\bar{o} \neq \bar{1}$	

- Einbettung der reellen Zahlen - die zweite reelle Achse
  Weiters können wir jede reelle Zahl als eine Element der Vektoren auffassen, wenn wir folgende Identifizierung vornehmen: $r \equiv \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir betten damit den reellen Zahlenstrahl in eine Zahlenebene ein bzw. umgekehrt betrachtet: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}^1$ werden damit zu einer (geometrisch gesehen zweidimensionalen) Menge $\mathbb{R}^2$, wobei aus dem Punktprodukt das Kreisprodukt wird. Dies ermöglicht es uns, Probleme anzugehen und zu verstehen, bei denen wir bisher gescheitert sind. Was wir gewonnen haben, ist nämlich ein zusätzlicher Freiheitsgrad, denn wir nun ausspielen wollen.
  Die Zahlenmenge $\mathbb{R}^2$ mit Kreisprodukt ist „abwärtskompatibel"
  $$\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot s \\ 0 \end{pmatrix}$$
  D.h. also wir können sämtliche Rechenoperationen des $\mathbb{R}^1$ auch als Rechnung im $\mathbb{R}^2$ deuten - was ja Sinn jeder derartigen Einbettung ist.

- Um den zweidimensionalen Charakter unserer neuen Rechenobjekte besser zu betonen, soll im Folgenden - so wie bisher - der Schreibweise $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ der Vorzug gegeben werden. Natürlich lässt sich statt mit Vektoren auch mit Punkten arbeiten. Wenn wir dies tun, soll aber nicht die Spaltenschreibweise aufgegeben werden, sondern der Wechsel in der Interpretation durch die Verwendung der Schreibweise

$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Da der Unterschied nur in der Interpretation liegt, können wir (rein formal) auch schreiben

$z = \bar{x}$.

- Um Missverständnissen vorzubeugen: Es soll hier vermieden werden, die beiden Achsen mit x und y zu bezeichen. Wir sprechen einfach von 1. und 2. Achse. Weiters soll vermieden werden, die 2. Achse als imaginäre Achse zu bezeichnen. Das würde die Sache nur unnötig mystifizieren. Und schließlich soll (vorläufig) vermieden werden, das Symbol i ins Spiel zu bringen - sofern nicht wirklich eine Notwendigkeit dafür besteht (und die wird lange nicht bestehen).

2 Reelle Gleichungen mit Kreisprodukt

Wir wollen nun - exemplarisch - ein Beispiel betrachten, das innerhalb der reellen Zahlenmenge zu keiner zufriedenstellenden Lösung führt wo also die Suche nach Lösungen im $\mathbb{R}^1$ scheitert. Üblicherweise steht dieses Beispiel am Beginn eines Abschnitts über komplexe Zahlen und wird etwa folgendermaßen behandelt:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-1}$$

Daraufhin wird ein Symbol i (das mehr oder weniger direkt vom Himmel fällt) ins Spiel gebracht, von dem postuliert wird, dass $i^2 = -1$ sein soll. Anschließend werden komplexe Zahlen definiert mit denen dann ein wenig gerechnet wird. Ein Verständnis für komplexe Zahlen wird auf diese Weise m.E. aber von vornherein ausgeschlossen (oder zumindest sehr erschwert). Es müsste aber nicht so sein. Da eine Lösung dieser Gleichung in $\mathbb{R}^1$ offenbar nicht möglich ist, wollen wir die Gleichung im Zahlenraum $\mathbb{R}^2$ betrachten. Interpretieren wir dazu die Gleichung als Gleichung im $\mathbb{R}^2$ mit Kreisprodukt:

$$x^2+1=0$$

$$\bar{x}\circ\bar{x}+\bar{1}=\bar{o}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2-x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2-x_2^2+1 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um zu Verstehen was die letzte Zeile bedeutet, wollen wir einige Visualisierungen, die uns die neuen Technologien zur Verfügung stellen, nutzen.

(1) Visualisierung mittels dynamischer Geometrie-Software: Bekanntlich können Abbildungen vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ (mangels 4-dimensionalem Vorstellungsvermöglichen) nicht dargestellt werden. Wir sind also auf anderer Methoden angewiesen, um zu Visualisierungen zu kommen. Hier kommen die neuen Technologien ins Spiel. Eine bekannte (aber in der Schule viel zu wenig genützte) Methode besteht darin, mit zwei Zeigern zu arbeiten und sich anzusehen, wie der Punkt auf den der Argumentzeiger gerichtet ist, durch die vorgegebene Abbildung (in unserem Beispiel also $\bar{x}\circ\bar{x}+\bar{1}$) auf den Wertepunkt, auf den der Wertezeiger gerichtet ist, abgebildet wird. Wir können die Methode verbessern, wenn wir den Zeiger gewisse Kurven (die wir uns beliebig vorgeben können) durchlaufen lassen und dabei jeweils die Spuren aufzeichen. Wir sehen schon nebenbei, dass nur wenn der Argumentzeiger die Stellen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ durchläuft, erreicht der Bildzeiger den Ursprung.

Schließlich können wir die Kurven als solche abbilden (Abb. 1) und daraus das lokal das Verhalten unserer

Abbildung erahnen. Abb. 1 zeigt, wie so etwas unter Verwendung der dynamischen Geometriesoftware CABRI 2.0 aussieht.

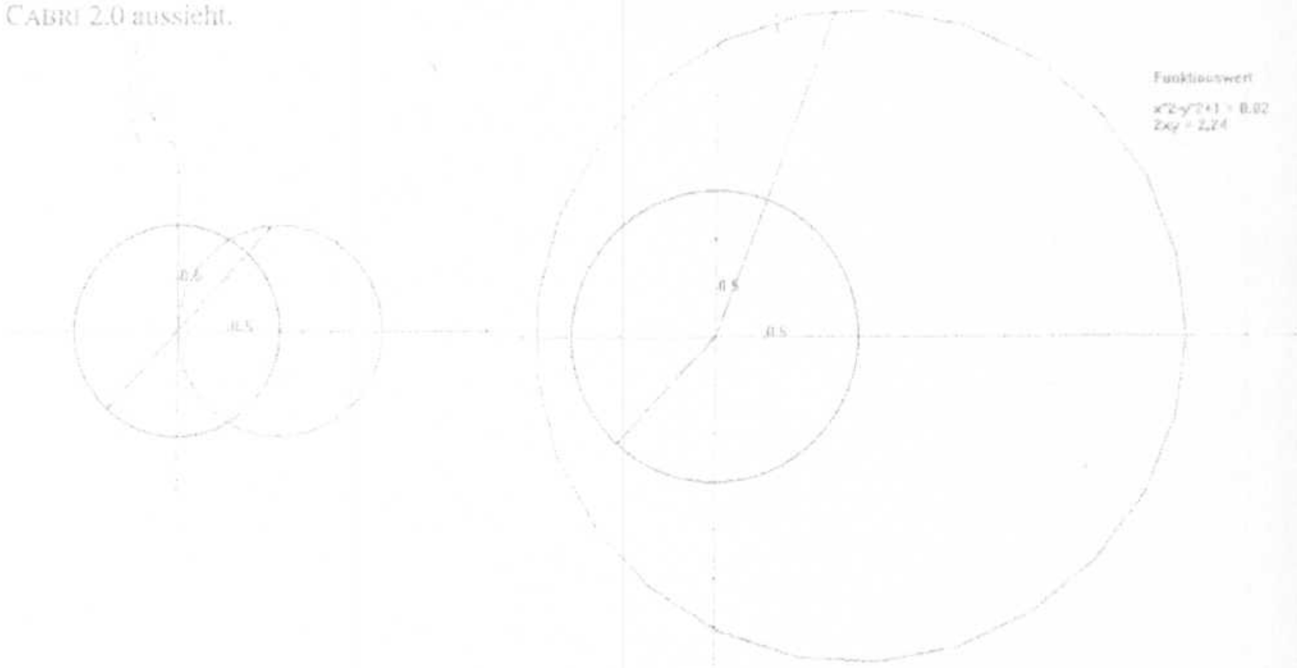
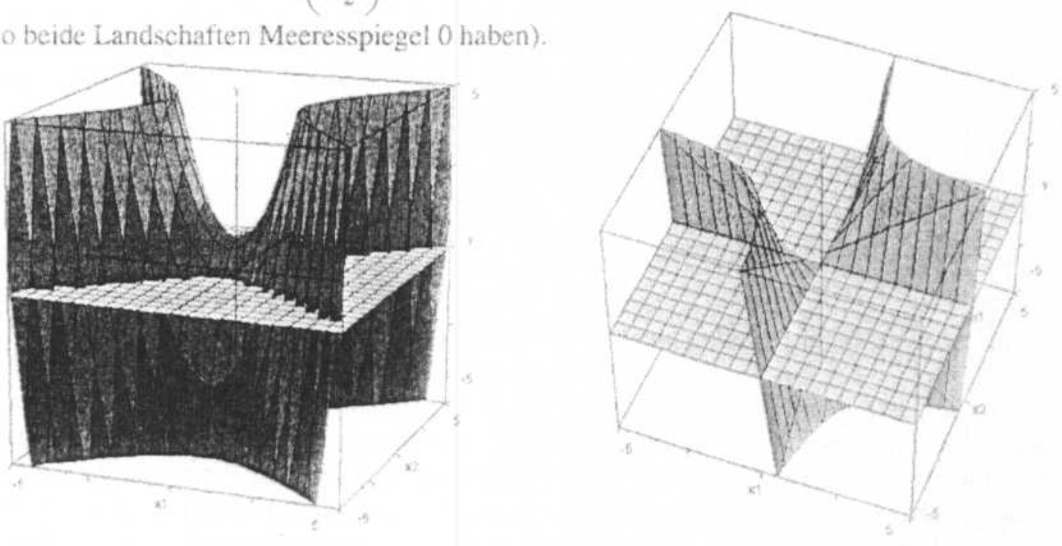


Abb. 1: links: Abbildung des Einheitskreises, rechts: Abbildung des Kreises $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 1{,}5^2$

(2) Visualisierung mittels 3D-Plotter: Wir können die linke Seite der obigen Vektorgleichung auffassen als 2 Funktionen in den Unbekannten x_1 und x_2. Diese beiden Funktionen $u(x_1, x_2) := x_1^{\,2} - x_2^{\,2} + 1$ und $v(x_1, x_2) := 2x_1x_2$ wollen wir mittels DERIVE 5.06 plotten. Durch die Deutung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in der »Ebene mit Kreisprodukt« erhält diese eine *zweifache* Fortsetzung.

Die Gleichung lösen heißt, nach Stellen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zu suchen, wo beide Funktionen Nullstellen besitzen. (Salopp gesprochen: wo beide Landschaften Meeresspiegel 0 haben).



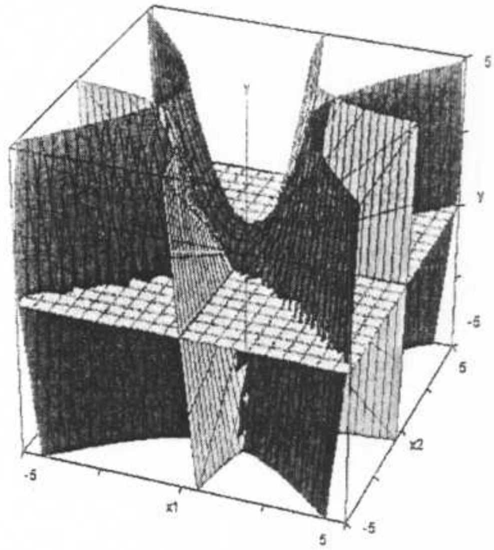
$u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := x_1^{\,2} - x_2^{\,2} + 1$ $\qquad$ $v\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := 2x_1x_2$

Abb.2: Die beiden Fortsetzungen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$

Vereinbarung: die Funktion der ersten Koordinate soll künftig blau, die der zweiten Koordinate rot geplottet werden, Absolutbeträge grau.

Beide Funktionen zusammen zeigt Abb.3. Das ist also die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ betrachtet bzw. erweitert auf die Ebene mit Kreisprodukt. Man benötigt also zwei Funktionen $u(\bar{x}) = x_1^{\,2} - x_2^{\,2} + 1$ und $v(\bar{x}) := 2x_1x_2$ um sie darstellen zu können.

Abb.3: $$\overline{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ v\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\,2} - x_2^{\,2} + 1 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$



Wir sind aber gar nicht so sehr an den Funktionen, sondern gemäß obiger Gleichung an ihren gemeinsamen Nullstellen interessiert. Es ist in DERIVE nicht allzu schwierig, diese Nullstellenkurven zu zeichnen. Man erreicht dies einfach indem man die entsprechenden parametrisierten Kurven zeichnen lässt. Diese erhält man durch Null-Setzen der entsprechenden Koordinatenfunktionen

```
#1:  InputMode := Word

              2     2
#2:  SOLVE(x1  - x2  + 1 = 0, x2)

                    2                  2
#3:  x2 = - √(x1  + 1) ∨ x2 = √(x1  + 1)

     [        2        ]
#4:  [t, √(t  + 1), 0]

     [          2        ]
#5:  [t, - √(t  + 1), 0]

#6:  SOLVE(2·x1·x2 = 0, x2)

#7:  x2 = 0 ∨ x1 = 0

#8:  [t, 0, 0]

#9:  [0, t, 0]
```

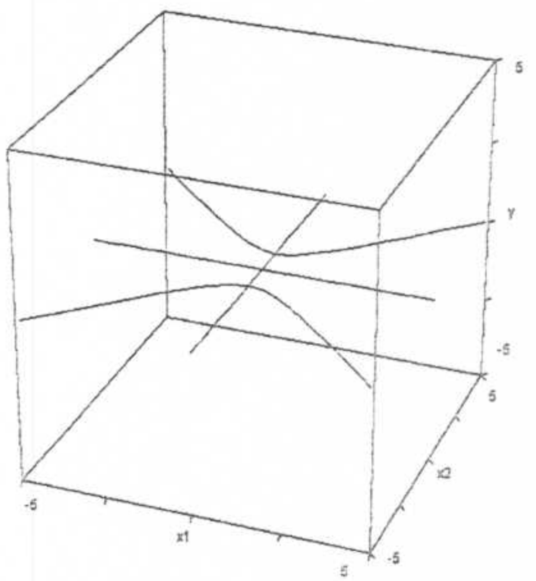


Abb. 4:

Die beiden Nullstellenmengen bilden eine Hyperbel bzw. ein Kreuz. Nur zwei Stellen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ gehören beiden Mengen an. Das sind unsere gesuchten Lösungen (Abb. 4).

Wir sehen die Verhältnisse noch deutlicher, wenn wir an Stelle der Funktionen u und v (aus denen sich $\overline{f}$ zusammensetzt) den Absolutbetrag von $\overline{f}$ betrachten. Dort wo *u und v* gemeinsame Nullstellen haben, muss ja auch die Betragsfunktion $\left|\overline{f}(\bar{x})\right| = \sqrt{u^2(\bar{x}) + v^2(\bar{x})}$ ihre Nullstellen besitzen.

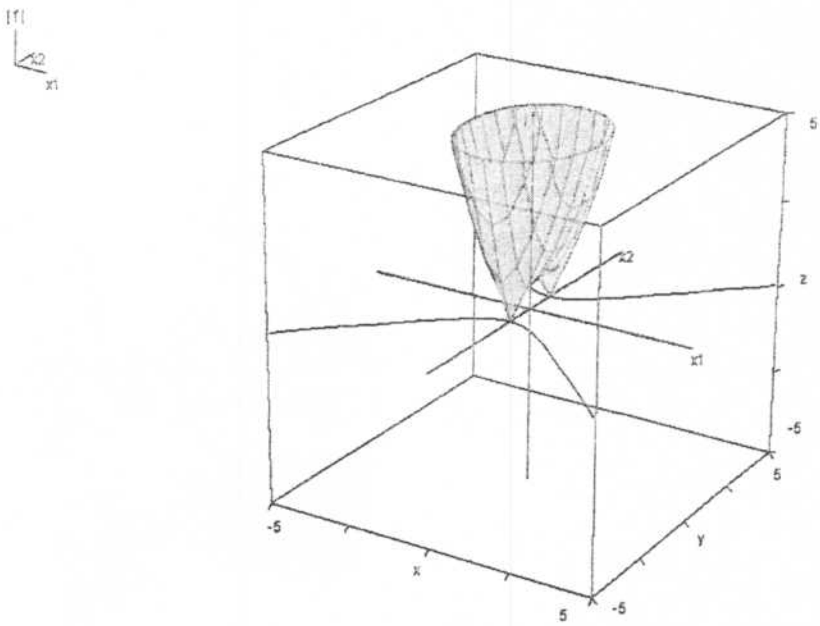


Abb. 5: $|\overline{f}(\bar{x})| = \sqrt{(x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} + 1)^2 - (2x_1x_2)^2}$

Im Weiteren soll noch der Zusammenhang mit der ursprünglichen Funktion $f(x) = x^2 + 1$ und der Funktion $\overline{f}(\bar{x}) = \bar{x}^2 + \bar{1}$ gezeigt werden.

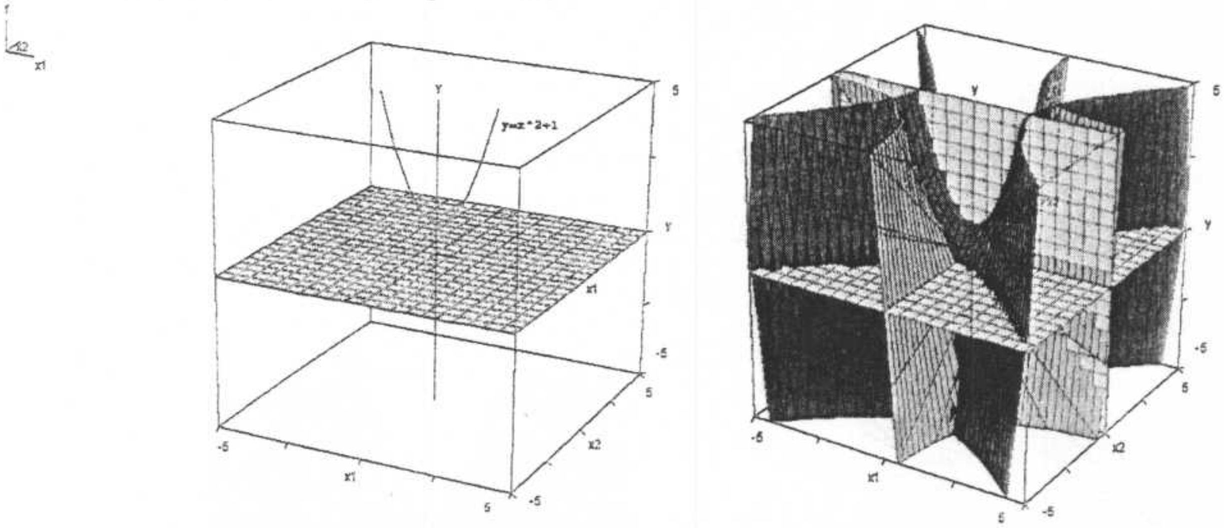


Abb.6: Die Erweiterung der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ von $\mathbb{R}^1$ in die Menge $\mathbb{R}^2$ mit Kreisprodukt[1]

Wir erahnen in diesem ersten Beispiel auch sehr schön die „wahre Gestalt" der Funktion $f(x) = x^2 + 1$. Da wir nicht 4 Dimensionen zum Zeichnen zur Verfügung haben, können wir uns im 3-Dimensionalen mit zwei Funktionen in zwei Unbekannten helfen. (Es ist ähnlich wie ein 3D-Film: durch Projektion zweier 2D-Filmteile und einer geeigneten Brille wird ein 3D-Eindruck realisiert. Hier haben wir sozusagen die 3D-Projektionen eines 4-dimensionlen Gebildes. Es fehlt uns „nur" die entsprechende „Brille", die aus den zwei 3D-Flächen eine 4D-Fläche hervorzaubern könnte.)

Die ursprüngliche Funktion sehen wir überdies als Schnittkurve der 1. Teilfunktion $u(\bar{x})$ mit der Ebene über der ersten reellen Achse. Dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösungen liefert, wenn wir für x nur die Menge $\mathbb{R}^1$ zulassen wird nun auch klar, wenn wir sie vollständig zeichnen. Wir haben einfach nur eine

[1] Die linke Grahik wird in Derive einfach durch Angabe der parametrisierten Kurve [t,0, t²+1] erzeugt, die grüne Ebene können wir unmittelbar nach Eingabe von $x_2 = 0$ plotten.

Funktion erwischt, die ihre Nullstellen abseits der Achse $\mathbb{R}^1$ annimmt. Dies sieht man wiederum sehr schön in der Absolutbetrags-Darstellung der Funktion $\overline{f}(\bar{x})$

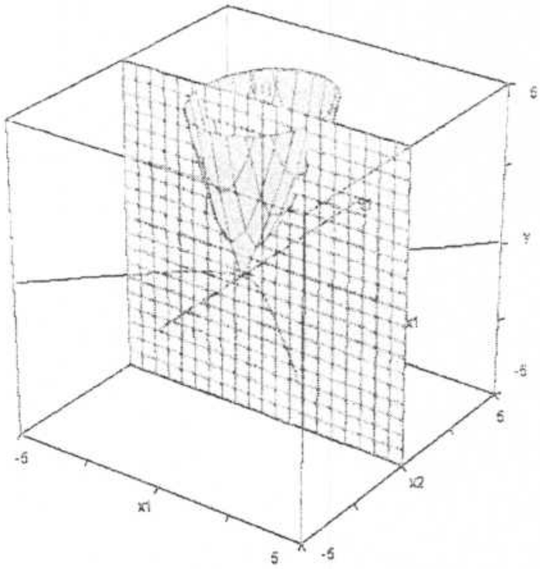


Abb. 7: Die Einschränkung auf $\mathbb{R}^1$ würde der Funktion $\overline{f}(\bar{x})$ Gewalt antun.

Soweit zum ersten Beispiel. Wir könnten natürlich nun daran gehen, weitere Gleichungen nach dieser Methode zu betrachten und zu lösen. Die wesentlichen Dinge haben wir aber hier schon gesehen. Aus Zeit- und Platzgründen soll mit diesem Beispiel das Auslangen gefunden werden. Statt dessen wollen wir uns nun die Erweiterungen der wichtigsten (schulmathematischen) Funktionen ansehen.

3 Erweiterung von Funktionen auf die Ebene mit Kreisprodukt

Wie sieht es nun mit der Fortsetzung von $\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^2$ bei anderen Funktionen aus?

3.1 Potenzfunktionen und Polynomfunktionen

Hier sind keine ernsthaften Probleme zu erwarten, da sowohl die Multiplikation mit einem Skalar als auch das Potenzieren als iterierte Kreisproduktbildung definiert sind. Sehen wir uns einfach einige Beispiel an. Es werden jeweils die Funktion f(z) (mittel der beiden Teilfunktion $u(x_1, x_2)$ (blau) und $v(x_1, x_2)$ (rot)) und die Betragsfunktion | f(z) | (grau) wiedergegeben.

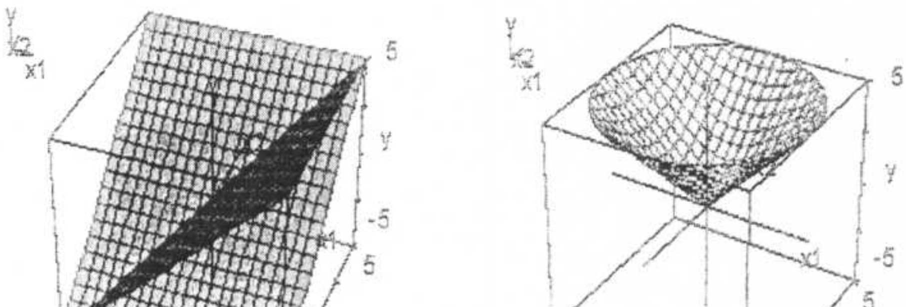


Abb.8: Die Funktion f(z) = z

Zum Erstellen der weiteren Funktionen bedienen wir uns der beiden Funktion CP (Circle Product) und CPP (Circle Product Power)

```
#1:  CP(v, w) := [v_1·w_1 - v_2·w_2, v_1·w_2 + v_2·w_1]

#2:  CPP(v, n) := ITERATE(CP(v, [a_, b_]), [a_, b_], [v_1, v_2], n - 1)
```

Das erste Modul ist nur die Umsetzung der Definition des Kreisprodukts in Derive, das zweite Modul ermittelt iterativ den gewünschten Funktionswert.

```
#1:  f(z) := CPP(z, 2)

#2:  f(z) = [x1^2 - x2^2, 2·x1·x2]

#3:  |f(z)| = x1^2 + x2^2
```

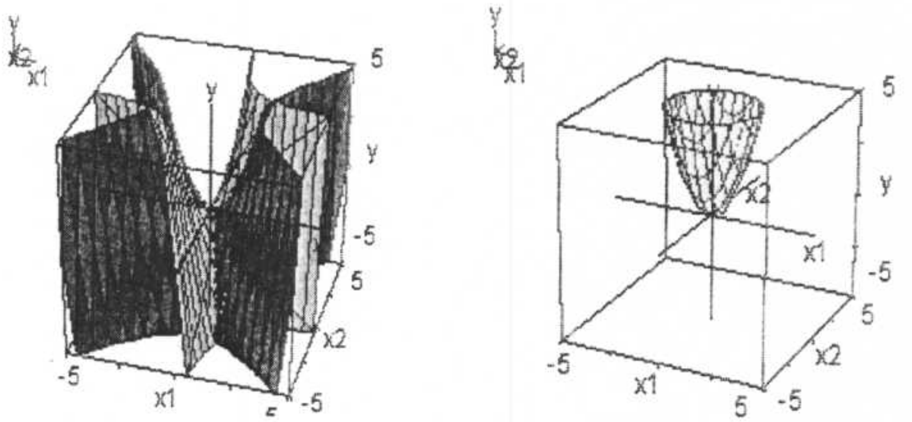


Abb.9: Die Funktion $f(z) = z^2$

3.2 Inverse Funktion, Potenzfunktionen mit negativen Exponenten, rationale Funktionen

Das folgende dritte Modul ermittelt das Inverse zu $z = \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, also $z^{-1} = \bar{x}^{-1} := \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} \\ -\dfrac{x_2}{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} \end{pmatrix}$

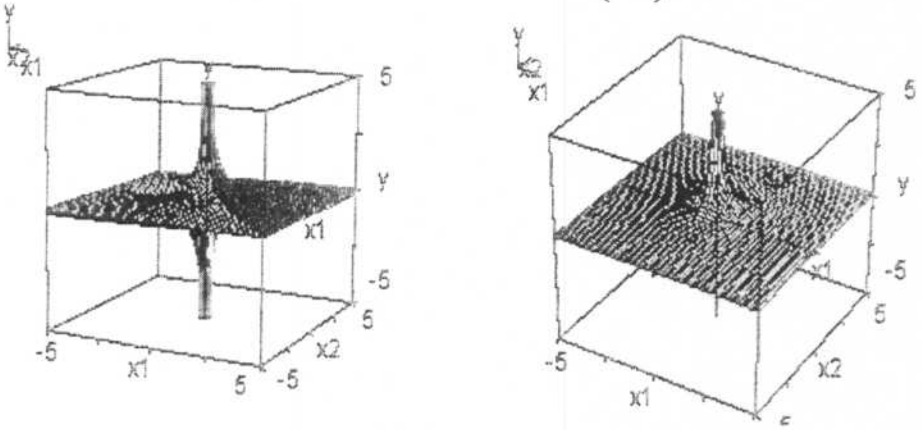


Abb.10: Die Funktion $f(z) = 1/z$

3.3 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Um zu einer sinnvollen Erweiterung (Definition, Neudefinition) der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen Sinus bzw. Cosinus zu kommen, ist es erforderlich, ein wenig auszuholen.

Exponentialfunktion $e^z = e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$

Wie können wir diesem Ausdruck sinnvoll definieren? Beweisen wir dazu zuerst folgenden

Satz: $e^{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$ („Verkleidete Eulersche Formel")

Beweis: Nun, wir können (rein formal, d.h. es soll von Konvergenzüberlegungen abgesehen werden) die Potenzreihe bilden, wobei als Produkt jeweils das Kreisprodukt verwendet wird.

$$e^z := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$$

Damit ergibt sich sofort

$$e^{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}^i = \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}^1 + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}^3 + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}^4 + \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}^5 + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -x_2^{\,2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 \\ -x_2^{\,3} \end{pmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} x_2^{\,4} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2^{\,5} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{x_2^{\,2}}{2!} + \frac{x_2^{\,4}}{4!} - + \ldots \\ x_2 - \frac{x_2^{\,3}}{3!} + \frac{x_2^{\,5}}{5!} - + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$$

□

Damit erhalten wir auch sofort einen Ausdruck für $e^z = e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$. Wir brauchen nämlich nur mit e^{x_1} zu multiplizieren. (Wir setzen hier die Rechenregeln für Exponentialfunktionen als in den $\mathbb{R}^2$ mit Kreisprodukt übertragbar voraus.)

$$\left.\begin{array}{l} e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \\ e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}} = e^{x_1} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}} = e^{x_1} \cdot \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cdot \cos x_2 \\ e^{x_1} \cdot \sin x_2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cdot \cos x_2 \\ e^{x_1} \cdot \sin x_2 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir also mit $e^z = e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = e^{x_1} \cdot \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$ die gewünschte Beziehung gewonnen. Man erkennt dabei auch unmittelbar, dass die Exponentialfunktion entlang der zweiten Achse periodisch sein muss.

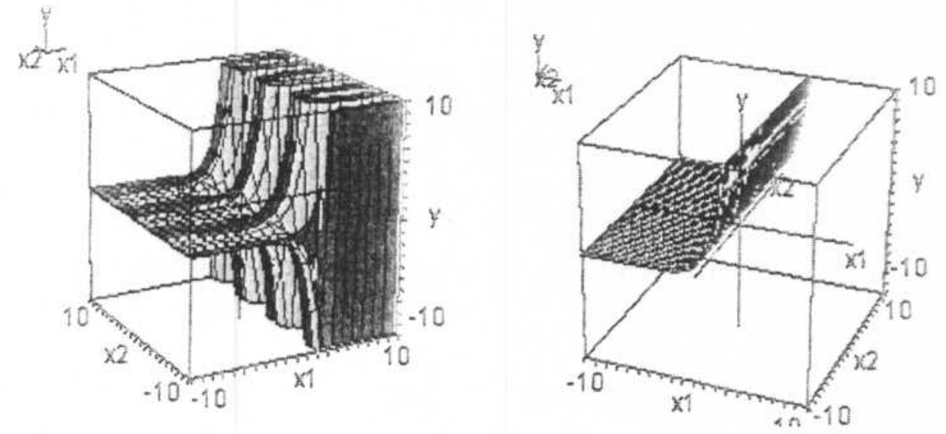


Abb.11: Die Funktion f(z) = exp(z)

In analoger Weise können wir auch Beziehungen für die Sinus- und die Cosinusfunktion gewinnen (siehe Anhang).

3.4 Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion ist jene Funktion, die den Exponenten angibt, mit dem eine bestimmte (vorgegebene) Basis potenziert werden muss, um das Argument x zu erhalten. Versuchen wir diese Definition einfach im $\mathbb{R}^2$ zu interpretieren. Es muss also gelten

$$e^w = z \Leftrightarrow \ln z = w \text{ bzw. } e^{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ln \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Mit obigem Satz erhalten wir (unter der Voraussetzung der Übertragbarkeit der Rechenregeln für den Logarithmus):

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = |z| \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = |z| \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \ln \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \ln |z| \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}} = \ln|z| + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln|z| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln|z| \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Üblicherweise bezeichnet man den Winkel φ mit $-\pi < \varphi \le \pi$ als Arg(z). Da dieser Winkel aber nur modulo 2π bestimmt ist, setzen wir $\arg(z) := Arg(z) + 2\pi \cdot k$ mit $k \in Z$ .Damit haben wir auch eine brauchbare Definition für den Logarithmus von $z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Definition: Die Funktion $\ln z := \begin{pmatrix} \log|z| \\ \arg z \end{pmatrix}$ ist die Logarithmusfunktion für $\mathbb{R}^2$ mit Kreisprodukt.

Diese Funktion ist – da arg z unendlich viele Werte annimmt (je nachdem wie oft 2 π addiert oder subtrahiert wird) – unendlich-deutig.

$$\#1: \quad \text{LOG\_z}(x1, x2) := \left[\text{LN}\left(\sqrt{x1^2 + x2^2}\right), \text{IF}\left(x2 \ne 0, \frac{\pi \cdot \text{SIGN}(x2)}{2} - \text{ATAN}\left(\frac{x1}{x2}\right)\right)\right]$$

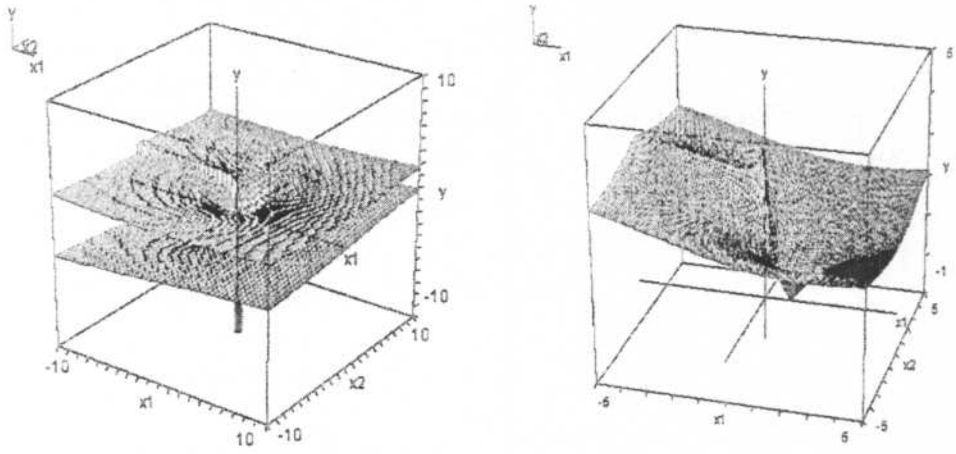


Abb.12: Die Funktion f(z) = ln(z) (Hauptzweig)

Sehen wir uns einige Blätter des Logarithmus nebeneinander an. Die Unterschiede finden sich ja nur in der Teilfunktion v(x1,x2).

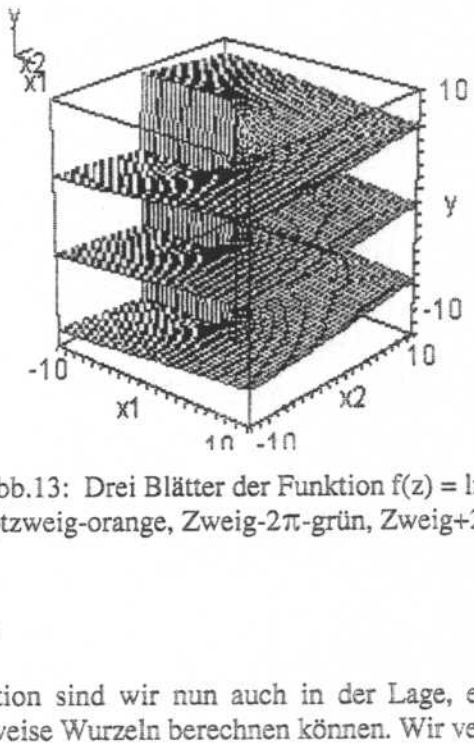


Abb.13: Drei Blätter der Funktion f(z) = ln(z)
(Hauptzweig-orange, Zweig-2π-grün, Zweig+2π-gelb)

3.5 Allgemeine Potenzfunktion

Mit Hilfe der Logarithmusfunktion sind wir nun auch in der Lage, eine allgemeine Potenzfunktion zu definieren, mit der wir beispielsweise Wurzeln berechnen können. Wir vewenden dazu die Beziehung

$$z^u = e^{u\cdot\ln z} = e^{\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\ln|z|\\ \arg z\end{pmatrix}}$$

Die Definition der Quadratwurzel ergibt sich dann mit

$$\sqrt{z} := z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\cdot\ln z} = e^{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\ln|z|\\ \arg z\end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot\ln|z|\\ \frac{1}{2}\cdot\arg z\end{pmatrix}} = \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot\ln|z|}}_{\sqrt{|z|}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}\arg z)\\ \sin(\frac{1}{2}\arg z)\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\cos(\frac{\varphi+2\pi\cdot k}{2})\\ \sin(\frac{\varphi+2\pi\cdot k}{2})\end{pmatrix}}$$

Da nur k ∈ { 0,1 } sinnvoll ist (jedes andere k ergibt ein zu 0 oder 1 gleichwertiges Argument), erhalten wir also als Wurzelfunktion eine zweideutige Funktion.

Damit sind wir in der Lage, auf einem anderen Weg zu einer Lösung der Gleichung $x^2+1=0$ zu gelangen. Wir können nun wirklich so vorgehen, wie dies in der Schule zumeist versucht wird:

$$x^2+1=0$$
$$x^2=-1$$
$$\bar{x}\circ\bar{x}=-\bar{1}$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\sqrt{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\sqrt{\left|\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right|}\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{1}{2}\arg\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)\\ \sin\left(\frac{1}{2}\arg\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi+2\pi\cdot k}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi+2\pi\cdot k}{2}\right)\end{pmatrix}\qquad \text{mit } k\in\{\,0,\,1\,\}$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_{k=0}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_{k=1}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

4 Komplexe Zahlen

Was wir bisher getan haben ist - bis auf den Einsatz einiger Visualisierungen - natürlich nichts Neues. Es wurden lediglich die komplexen Zahlen in etwas anderer Notation verwendet.

$$z=\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}}_{x_1}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{i}\circ\underbrace{\begin{pmatrix}x_2\\0\end{pmatrix}}_{x_2}=x_1+i\cdot x_2$$

$$f(z)=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}u(x_1,x_2)\\v(x_1,x_2)\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(z)\\\mathrm{Im}(z)\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}u(x_1,x_2)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(x_1,x_2)\\0\end{pmatrix}=u(z)+i\cdot v(z)$$

Resumee:

- Die allzu rasche Einführung der imaginären Einheit i behindert ein Verstehen dessen, was i bedeutet und welche Zusammenhänge mit i (in der Schule) verbunden sind.
- Mathematische Werkzeuge können sehr gute Dienste bei der Visualisierung grundlegender mathematischer Konzepte leisten. (Dies sollte man sich nicht entgehen lassen, wenn man im Unterricht auf der Höhe der Zeit sein will).
- Der Zugang über Vektoren ermöglicht ein besseres Aufzeigen und Herstellen von Zusammenhängen (Vektorprodukte-Additionstheoreme-Gleichungslösen-Erweiterung von Zahlenmengen und Erhaltung der Rechenoperationen - algebraische Strukturen- Fuktionenlehre).

Anhang: Einige Beziehungen in der Menge der Vektoren mit Kreisprodukt

(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = |z| \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = |z| \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}}$

(3) $e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = e^{x_1} \cdot \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix} = e^{x_1} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}}$

(4) $\cos\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh x_2 \cdot \cos x_1 \\ -\sinh x_2 \cdot \sin x_1 \end{pmatrix}$

(5) $\sin\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh x_2 \cdot \sin x_1 \\ \sinh x_2 \cdot \cos x_1 \end{pmatrix}$

(6) $e^{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \cos\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \sin\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(7) $\ln\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log\left|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right| \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log|z| \\ \arg z \end{pmatrix}$ mit $\arg(z) := \varphi + 2\pi \cdot k$ und φ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$

(8)

$$z^u = e^{\ln z^u} = e^{u \cdot \ln z} = e^{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \ln|z| \\ \arg z \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} u_1 \cdot \ln|z| - u_2 \cdot \arg z \\ u_1 \cdot \arg z + u_2 \cdot \ln|z| \end{pmatrix}} = e^{u_1 \cdot \ln|z| - u_2 \cdot \arg z} \cdot \begin{pmatrix} \cos(u_1 \cdot \arg z + u_2 \cdot \ln|z|) \\ \sin(u_1 \cdot \arg z + u_2 \cdot \ln|z|) \end{pmatrix}$$

(8a) Sei $\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z^u = e^{u_1 \cdot \ln|z|} \cdot \begin{pmatrix} \cos(u_1 \cdot \arg z) \\ \sin(u_1 \cdot \arg z) \end{pmatrix}$

Literatur:

J. B. CONWAY (1978²): Functions of one complex variable. Springer, New York - Heidelberg - Berlin.
R. REMMERT, G. SCHUMACHER (2002⁵): Funktionentheorie 1, Springer, New York - Heidelberg - Berlin.